BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Regresi Linier Berganda

Kutner, *et al*. (2004) menjelaskan model regresi linier berganda dengan *k* prediktor adalah

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \cdots + \beta_k x_{ik} + \varepsilon_i \qquad (2.1)$$

di mana:

i = 1,2, ..., n
j = 1, 2, ..., k
n = banyaknya pengamatan
k = banyaknya peubah prediktor dalam model
p = k + 1 = banyaknya parameter dalam model
y_i = nilai ke-*i* peubah respon
x_{ij} = nilai ke-*i* peubah prediktor ke-*j*
β_j = parameter regresi prediktor ke-*j*
ε_i = nilai ke-*i* peubah acak sisaan

Persamaan (2.1) dalam bentuk matriks adalah

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1k} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

atau

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} \qquad (2.2)$$

di mana:

$\boldsymbol{Y}$ **=** vektor peubah respon berdimensi ($n \times 1$)
$\boldsymbol{X}$ **=** matriks peubah predikor berdimensi ($n \times p$)
$\boldsymbol{\beta}$ **=** vektor parameter regresi berdimensi ($p \times 1$)
$\boldsymbol{\varepsilon}$ **=** vektor sisaan berdimensi ($n \times 1$)

Asumsi yang melandasi peubah acak sisaan adalah $E(\varepsilon_i) = 0$, $V(\varepsilon_i) = \sigma^2$ dan $cov(\varepsilon_i, \varepsilon_i') = 0$ atau $\varepsilon_i \sim NIID(0, \sigma^2)$, dalam bentuk matriks $\boldsymbol{\varepsilon} \sim NIID(\boldsymbol{0}, \sigma^2 \boldsymbol{I})$

di mana:

$E(\varepsilon_1)$ = 0, $E(\varepsilon_2)$ = 0, ..., $E(\varepsilon_n)$ = 0;
$E(\varepsilon_1)$ = $E(\varepsilon_2)$ = ... = $E(\varepsilon_n)$ = 0;
$E(\varepsilon_i)$ = 0

$V(\varepsilon_1) \quad = \sigma^2, V(\varepsilon_2) = \sigma^2, ..., V(\varepsilon_n) = \sigma^2;$
$V(\varepsilon_1) \quad = V(\varepsilon_2) = ... = V(\varepsilon_n) = \sigma^2;$
$V(\varepsilon_i) \quad = \sigma^2$

2.2 Struktur Data Regresi Linier Berganda

Analisis regresi linier berganda adalah alat statistika untuk mengetahui bentuk hubungan dua atau lebih peubah prediktor terhadap peubah respon. Struktur data untuk model 2.1 adalah

Tabel 2.1. Struktur Data Regresi Linier Berganda

y_i	x_{ij}			
	x_{i1}	x_{i2}	…	x_{ik}
y_1	x_{11}	x_{12}	…	x_{1k}
y_2	x_{21}	x_{22}	…	x_{2k}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
y_n	x_{n1}	x_{n2}	…	x_{nk}

2.3 Metode Kuadrat Terkecil (MKT)

Metode ini digunakan untuk menduga parameter regresi (2.1) yang bersifat linier dalam parameter. Draper dan Smith (1992) menjelaskan prinsip MKT adalah meminimumkan jumlah kuadrat sisaan.

Menerapkan asumsi peubah acak sisaan, persamaan (2.1) ditulis:

$E(y_i) \quad = E(\beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \cdots + \beta_k x_{ki}) + E(\varepsilon_i)$
$E(y_i) \quad = E(\beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \cdots + \beta_k x_{ki}) + 0$
$\hat{y}_i \quad = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \cdots + \beta_k x_{ki}$ (2.3)

Dengan mensubstitusikan persamaan (2.3) ke persamaan (2.1) didapatkan

$y_i \quad = \hat{y}_i + \varepsilon_i$
$\varepsilon_i \quad = y_i - \hat{y}_i$, dalam bentuk matriks $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X\beta}$

Jumlah kuadrat sisaan adalah

$S(\boldsymbol{\beta}) \quad = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{\varepsilon} = (\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X\beta})'(\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X\beta})$
$\quad = \boldsymbol{Y}'\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{Y}'\boldsymbol{X\beta} - (\boldsymbol{X\beta})'\boldsymbol{Y} + (\boldsymbol{X\beta})'\boldsymbol{X\beta}$
$\quad = \boldsymbol{Y}'\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{Y}'\boldsymbol{X\beta} - \boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Y} + \boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X\beta}$

Sesuai dengan sifat putaran matriks, $\boldsymbol{Y}'\boldsymbol{X\beta} = (\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Y})'$ maka

$S(\boldsymbol{\beta}) \quad = \boldsymbol{Y}'\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Y} + \boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X\beta}$
$\quad = \boldsymbol{Y}'\boldsymbol{Y} - 2\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Y} + \boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X\beta}$

Penduga kuadrat terkecil harus memenuhi:

$$\frac{\partial S(\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}} = -2\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Y} + 2\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}$$

$$0 = -2\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Y} + 2\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}}$$

$$2\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}} = 2\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Y}$$

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}} = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Y} \tag{2.4}$$

Karakteristik penduga MKT adalah

a) Tak bias

Penduga dikatakan tak bias ketika nilai harapan penduga sama dengan parameter.

$$\begin{aligned}
E(\widehat{\boldsymbol{\beta}}) &= E((\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Y}) \\
&= E((\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'(\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon})) \\
&= E((\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\varepsilon}) \\
&= E((\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}) + E((\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\varepsilon}) \\
&= (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'E(\boldsymbol{\varepsilon})
\end{aligned}$$

Karena $E(\boldsymbol{\varepsilon}) = 0$ dan $(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X} = \boldsymbol{I}$, maka

$$E(\widehat{\boldsymbol{\beta}}) = \boldsymbol{\beta} \tag{2.5}$$

Dapat dikatakan $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ merupakan penduga tak bias bagi $\boldsymbol{\beta}$.

b) Ragam penduga

Ragam penduga MKT adalah

$$\begin{aligned}
var(\widehat{\boldsymbol{\beta}}) &= E((\widehat{\boldsymbol{\beta}} - E(\widehat{\boldsymbol{\beta}}))(\widehat{\boldsymbol{\beta}} - E(\widehat{\boldsymbol{\beta}}))') \\
&= E((\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})(\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})') \qquad (2.6)
\end{aligned}$$

Mensubstitusikan persamaan (2.2) ke persamaan (2.4), maka diperoleh

$$\begin{aligned}
\widehat{\boldsymbol{\beta}} &= (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'(\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}) \\
&= (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\varepsilon} \\
&= \boldsymbol{\beta} + (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\varepsilon}
\end{aligned}$$

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\varepsilon} \tag{2.7}$$

Dengan mensubstitusi persamaan (2.7), persamaan (2.6) dapat ditulis kembali

$$\begin{aligned}
var(\widehat{\boldsymbol{\beta}}) &= E(((\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\varepsilon})((\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\varepsilon})') \\
&= E((\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{X}((\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1})') \\
&= (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'E(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}')\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}
\end{aligned}$$

Karena $E(\boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{\varepsilon}) = var(\boldsymbol{\varepsilon}) = \sigma^2\boldsymbol{I}$, maka

$$var(\widehat{\boldsymbol{\beta}}) = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\sigma^2\boldsymbol{I}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}$$
$$= \sigma^2(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}$$
$$= \sigma^2(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1} \quad (2.8)$$

2.4 Asumsi Regresi Linier Berganda

2.4.1 Kenormalan Sisaan

Model regresi dikatakan baik jika memiliki nilai sisaan menyebar normal dengan $E(\varepsilon_i) = 0$ dan $V(\varepsilon_i) = \sigma^2$. Pengujian asumsi kenormalan sisaan dilakukan dengan uji Shapiro Wilk berlandaskan hipotesis (Shapiro dan Wilk, 1965):

H_0 : sisaan menyebar normal vs

H_1 : sisaan tidak menyebar normal

Jika H_0 benar, maka statistik W:

$$W = \frac{b^2}{\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_{(i)}^2} \quad (2.9)$$

$$b = \sum_{i=1}^{k} a_{n-i+1}(\varepsilon_{(n-i+1)} - \varepsilon_{(i)})$$

$$k = \begin{cases} \frac{n}{2}, n \text{ genap} \\ \frac{n+1}{2}, n \text{ ganjil} \end{cases}$$

di mana:

a_i = nilai tabel koefisien ke-*i* Shapiro Wilk

$\varepsilon_{(i)}$ = statistik peringkat ke-*i* peubah acak sisaan

H_0 diterima jika $W > W_{\alpha(n)}$, sisaan menyebar normal.

2.4.2 Kehomogenan Ragam Sisaan

Selain menyebar normal, sisaan harus memenuhi asumsi ragam konstan, $V(\varepsilon_i) = \sigma^2$, i = 1, 2, ..., *n*. Akibat yang ditimbulkan apabila asumsi ini tidak terpenuhi adalah ragam sisaan tidak minimum (Gujarati, 1995). Uji kehomogenan ragam sisaan dapat dilakukan menggunakan uji Breusch-Pagan berdasarkan hipotesis:

H_0 : $V(\varepsilon_i) = \sigma^2$

H_1 : $V(\varepsilon_i) \neq \sigma^2$

Prosedur pengujian Breusch-Pagan adalah:

a) Melakukan pendugaan parameter persamaan regresi linier berganda dan mendapatkan penduga sisaan.
b) Menduga parameter *auxiliary regression*, dengan sisaan sebagai peubah respon.
c) Menghitung koefisien determinasi (R^2) model *auxiliary regression*
d) Menghitung statistik uji *Lagrange Multiplier* (*LM*):

$$LM = nR^2 \sim \chi^2_{m-1}$$

Apabila P($\chi^2_{m-1} \geq nR^2$) < α, H_0 ditolak, ragam sisaan tidak homogen.

2.4.3 Non Autokorelasi

Analisis regresi menghendaki asumsi autokorelasi yakni hubungan antar sisaan tidak terpenuhi. Pengujian asumsi non autokorelasi menggunakan uji Durbin Watson, berlandaskan hipotesis:

H_0 : sisaan saling bebas vs

H_1 : sisaan tidak saling bebas

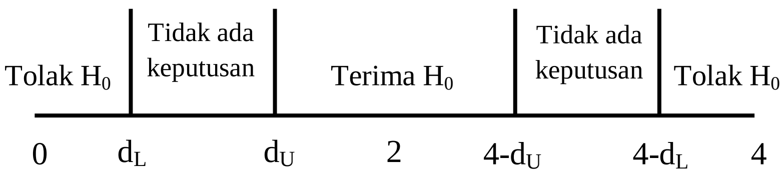
Jika H_0 benar, maka statistik *d*:

$$d = \frac{\sum_{i=2}^{n}(\hat{\varepsilon}_i - \hat{\varepsilon}_{i-1})^2}{\sum_{i=1}^{n} \hat{\varepsilon}_i^{\,2}} \qquad (2.10)$$

Kriteria pengujian Durbin Watson dijelaskan di bawah ini:

Tabel 2.2. Kaidah Keputusan Uji Durbin Watson

Kriteria	Keputusan
$d < d_L$ atau $d > 4 - d_L$	Tolak H_0
$d_U < d < 4 - d_U$	Terima H_0
$d_L < d < d_U$ atau $4 - d_U < d < 4 - d_L$	Tidak ada keputusan



di mana:
d = statistik uji Durbin Watson, $0 \leq d \leq 4$
d_L = batas bawah pada tabel Durbin Watson
d_U = batas atas pada tabel Durbin Watson

2.4.4 Non Multikolinieritas

Draper dan Smith (1992) menjelaskan multikolinieritas terjadi ketika terdapat hubungan linier antar peubah prediktor, menyebabkan kondisi buruk (*ill- conditioned*) di mana matriks $\boldsymbol{X'X}$ hampir singular, yang mengakibatkan penduga parameter regresi menggunakan MKT tidak bersifat BLUE. Keberadaan multikolinieritas didasarkan pada *Variance Inflation Factor* (VIF).

$$\text{VIF} = \frac{1}{1-R_j^2}, \quad (2.11)$$

di mana R_j^2 adalah koefisien determinasi antara x_j sebagai respon dengan (k-1) prediktor lain (*auxiliary regression*).

$$R_j^2 = \frac{JK_{Regresi}}{JK_{Total}}$$

Walpole (1993) mengatakan koefisien korelasi (r) mengukur keeratan hubungan antara dua peubah di mana $-1 \leq r \leq 1$.

$$r = \frac{cov(X_{ij}, X_{ij'})}{\sqrt{JK(X_j)\ JK(X_{j'})}} \quad (2.12)$$

di mana:
r = koefisien korelasi contoh
$cov(X_{ij},\ X_{ij'})$ = peragam dua peubah prediktor X_j dan $X_{j'}$
$JK(X_j)$ = jumlah kuadrat peubah X_j
$JK(X_{j'})$ = jumlah kuadrat peubah $X_{j'}$

Hipotesis yang melandasi pengujian adalah
$H_0 : \rho = 0$
$H_1 : \rho \neq 0$
$r \sim N(\rho, \sigma_r^2)$
di mana penduga bagi ragam koefisien regresi contoh adalah:

$$\hat{\sigma}_r^2 = S_r^2 = \frac{1-r^2}{n-2}$$

Jika H_0 benar dan σ_r^2 diketahui, maka statistik uji

$$\frac{r}{\sigma_r} \sim Z$$

Jika $\hat{\sigma}_r = s_r$, maka

$$\frac{r}{s_r} \sim t_{(n-2)}$$

$$\frac{r}{\sqrt{\frac{1-r^2}{n-2}}} \sim t_{(n-2)}$$

$$r\sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}} \sim t_{(n-2)}$$

Tolak H_0, jika $\frac{r}{s_r} > t_{\alpha(n-2)}$

Apabila n berukuran besar $(n \geq 30)$ dan $\alpha = 0.05$, maka diperoleh $t_{\alpha(n-2)} = 2$, sehingga

$$r\sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}} = 2$$

$$r^2\left(\frac{n-2}{1-r^2}\right) = 2^2$$

$$r = \pm 0.28 \approx \pm 0.3.$$

Berdasarkan perhitungan di atas, penelitian ini akan menggunakan koefisien korelasi 0.3 sampai 1, karena pada tingkat koefisien korelasi tersebut, dapat dikatakan data telah mengandung multikolinieritas.

2.5 Regresi Gulud (*Ridge Regression*)

Regresi *ridge* adalah salah satu metode untuk mengatasi kondisi buruk (*ill conditioned*) yang diakibatkan oleh korelasi tinggi antara peubah prediktor dalam model. Konsep regresi *ridge* adalah memberikan konstanta (c) pada diagonal matriks $\boldsymbol{X'X}$ dengan demikian parameter regresi dipengaruhi konstanta bias c. Analisis regresi *ridge* menghasilkan penduga bias namun ragam minimum. Sebelum melakukan pendugaan parameter regresi *ridge*, terlebih dahulu dilakukan pembakuan data. Pada penelitian ini, pembakuan data yang digunakan adalah metode pemusatan dan penskalaan.

2.5.1 Metode Pemusatan dan Penskalaan

Pada model regresi linier berganda, kesalahan pembulatan sangat mungkin terjadi yang menyebabkan hasil perhitungan tidak akurat. Kesalahan pembulatan terjadi ketika:

a) Ragam besar.
b) Determinan matriks $\boldsymbol{X'X}$ mendekati nol (terjadi multikolinieritas).

Solusi untuk hal ini adalah pemusatan dan penskalaan. Metode pemusatan membuat data berpusat di sekitar rata-rata sehingga ragam mengecil. Metode ini juga mengakibatkan β_0 hilang, sehingga perhitungan untuk menduga parameter model regresi linier berganda menjadi mudah dan lebih sederhana. Metode penskalaan menyebabkan unsur-unsur matriks ragam peragam bernilai antara -1 dan 1. Kutner, *et al.* (2004) mengatakan, pembakuan data menggunakan metode pemusatan dan penskalaan dilakukan dengan cara berikut

$$y_i^* = \frac{y_i - \bar{y}}{\sqrt{n-1}S_y} \quad (2.13)$$

$$x_{ij}^* = \frac{x_{ij} - \bar{x}_j}{\sqrt{n-1}S_x} \quad (2.14)$$

di mana S_y dan S_x adalah

$$S_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}{n-1}$$

$$S_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_{ij} - \bar{x}_j)^2}{n-1}$$

i = 1,2, ..., n
j = 1, 2, ..., k
$\bar{y}$ = rata-rata peubah respon
$\bar{x}_j$ = rata-rata peubah prediktor ke-j
S_y^2 = ragam peubah respon
S_x^2 = ragam peubah prediktor

sehingga didapatkan persamaan regresi linier berganda baru yaitu

$$y_i^* = \beta_1^* x_{i1}^* + \beta_2^* x_{i2}^* + \cdots + \beta_k^* x_{ik}^* + \varepsilon_i^*$$

dalam bentuk matriks ditulis $\boldsymbol{Y}^* = \boldsymbol{X}^*\boldsymbol{\beta}^* + \boldsymbol{\varepsilon}^*$ (2.15)

Penduga model regresi yang telah dibakukan adalah

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}^* = (\boldsymbol{X}^{*\prime}\boldsymbol{X}^*)^{-1}\boldsymbol{X}^{*\prime}\boldsymbol{Y}^* \quad (2.16)$$

$$\begin{bmatrix} y_1^* \\ y_2^* \\ \vdots \\ y_n^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11}^* & x_{12}^* & \cdots & x_{1k}^* \\ x_{21}^* & x_{22}^* & \cdots & x_{2k}^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1}^* & x_{n2}^* & \cdots & x_{nk}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

Matriks korelasi untuk persamaan (2.15) adalah

$$\begin{bmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} & \cdots & r_{1k} \\ r_{21} & 1 & r_{23} & \cdots & r_{2k} \\ r_{31} & r_{32} & 1 & \cdots & r_{3k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{k1} & r_{k2} & r_{k2} & \ldots & 1 \end{bmatrix}$$

2.5.2 *Ordinary Ridge Regression* (ORR)

ORR merupakan metode penanganan multikolinierias di mana pada matriks $\boldsymbol{X'X}$ ditambahkan konstanta bias (c) sama untuk setiap peubah prediktor. Model ORR dengan k prediktor adalah

$$y_i^* = \beta_1^{OR} x_{i1}^* + \beta_2^{OR} x_{i2}^* + \cdots + \beta_k^{OR} x_{ik}^* + \varepsilon_i^{OR} \tag{2.17}$$

di mana:
i = 1,2, ..., n
j = 1, 2, ..., k
n = banyaknya pengamatan
k = banyaknya peubah prediktor dalam model
y_i^* = nilai ke-i peubah respon yang dibakukan
x_{ij}^* = nilai ke-i peubah prediktor ke-j yang dibakukan
β_j^{OR} = parameter ORR prediktor ke-j
ε_i = nilai ke-i peubah acak sisaan

Persamaan (2.17) dalam bentuk matriks ditulis

$$\boldsymbol{Y}^* = \boldsymbol{X}^* \boldsymbol{\beta_{OR}} + \boldsymbol{\varepsilon_{OR}} \tag{2.18}$$

Draper dan Smith (1992) menjelaskan penduga regresi *ridge* diperoleh melalui MKT yang telah dimodifikasi dengan menambahkan kendala tertentu. Menerapkan pengganda Lagrange di mana $\boldsymbol{\beta_{OR}}$ adalah nilai yang meminimumkan fungsi tujuan dan syarat pembatas $\boldsymbol{\beta'_{OR}\beta_{OR}} \leq a^2$ maka

$$L = (\boldsymbol{Y}^* - \boldsymbol{X}^*\boldsymbol{\beta_{OR}})'(\boldsymbol{Y}^* - \boldsymbol{X}^*\boldsymbol{\beta_{OR}}) + c(\boldsymbol{\beta'_{OR}\beta_{OR}} - a^2)$$
$$= \left(\boldsymbol{Y}^{*\prime} - \boldsymbol{\beta'_{OR}}\boldsymbol{X}^{*\prime}\right)(\boldsymbol{Y}^* - \boldsymbol{X}^*\boldsymbol{\beta_{OR}}) + c(\boldsymbol{\beta'_{OR}\beta_{OR}} - a^2)$$
$$= \boldsymbol{Y}^{*\prime}\boldsymbol{Y}^* - \boldsymbol{Y}^{*\prime}\boldsymbol{X}^*\boldsymbol{\beta_{OR}} - \boldsymbol{\beta'_{OR}}\boldsymbol{X}^{*\prime}\boldsymbol{Y}^* + \boldsymbol{\beta'_{OR}}\boldsymbol{X}^{*\prime}\boldsymbol{X}^*\boldsymbol{\beta_{OR}} + c(\boldsymbol{\beta'_{OR}\beta_{OR}} - a^2)$$

Karena $\boldsymbol{\beta'_{OR}}\boldsymbol{X}^{*\prime}\boldsymbol{Y}^*$ skalar, maka dengan menggunakan sifat putaran matriks $(\boldsymbol{\beta'_{OR}}\boldsymbol{X}^{*\prime}\boldsymbol{Y}^*)' = \boldsymbol{Y}^{*\prime}\boldsymbol{X}^*\boldsymbol{\beta_{OR}}$, maka

$$L = \boldsymbol{Y}^{*\prime}\boldsymbol{Y}^* - \boldsymbol{\beta'_{OR}}\boldsymbol{X}^{*\prime}\boldsymbol{Y}^* - \boldsymbol{\beta'_{OR}}\boldsymbol{X}^{*\prime}\boldsymbol{Y}^* + \boldsymbol{\beta'_{OR}}\boldsymbol{X}^{*\prime}\boldsymbol{X}^*\boldsymbol{\beta_{OR}} + c(\boldsymbol{\beta'_{OR}\beta_{OR}} - a^2)$$
$$L = \boldsymbol{Y}^{*\prime}\boldsymbol{Y}^* - 2\boldsymbol{\beta'_{OR}}\boldsymbol{X}^{*\prime}\boldsymbol{Y}^* + \boldsymbol{\beta'_{OR}}\boldsymbol{X}^{*\prime}\boldsymbol{X}^*\boldsymbol{\beta}_R + c(\boldsymbol{\beta'_{OR}\beta_{OR}} - a^2)$$

Nilai L minimum jika

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\beta_{OR}}} = 0$$

$$0 = -2\boldsymbol{X}^{*\prime}\boldsymbol{Y}^* + 2\boldsymbol{X}^{*\prime}\boldsymbol{X}^*\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\boldsymbol{OR}} + 2c\boldsymbol{I}\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\boldsymbol{OR}}$$

$$0 = -\boldsymbol{X}^{*\prime}\boldsymbol{Y}^* + \boldsymbol{X}^{*\prime}\boldsymbol{X}^*\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\boldsymbol{OR}} + c\boldsymbol{I}\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\boldsymbol{OR}}$$

$$= -\boldsymbol{X}^{*\prime}\boldsymbol{Y}^* + \widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\boldsymbol{OR}}\,(\boldsymbol{X}^{*\prime}\boldsymbol{X}^* + c\boldsymbol{I})$$

Persamaan normal di atas dapat dibentuk menjadi

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\boldsymbol{OR}}\,(\boldsymbol{X}^{*\prime}\boldsymbol{X}^* + c\boldsymbol{I}) = \boldsymbol{X}^{*\prime}\boldsymbol{Y}^*$$

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\boldsymbol{OR}} = (\boldsymbol{X}^{*\prime}\boldsymbol{X}^* + c\boldsymbol{I})^{-1}\boldsymbol{X}^{*\prime}\boldsymbol{Y}^* \tag{2.19}$$

(Puri, 2014)

di mana:

$\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\boldsymbol{OR}}$ = vektor penduga parameter ORR berdimensi $(k \times 1)$

c = konstanta bias, $c > 0$

a = konstanta positif

Karakteristik penduga ORR adalah

a) Bias

Penduga dikatakan tak bias ketika nilai harapan penduga sama dengan parameter.

$$E(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\boldsymbol{OR}}) = E((\boldsymbol{X}^{*\prime}\boldsymbol{X}^* + c\boldsymbol{I})^{-1}\boldsymbol{X}^{*\prime}\boldsymbol{Y}^*)$$

$$= (\boldsymbol{X}^{*\prime}\boldsymbol{X}^* + c\boldsymbol{I})^{-1}\boldsymbol{X}^{*\prime}E(\boldsymbol{Y}^*)$$

Karena $E(\boldsymbol{Y}^*) = \boldsymbol{X}^*\boldsymbol{\beta}_{\boldsymbol{OR}}$, maka

$$E(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\boldsymbol{OR}}) = (\boldsymbol{X}^{*\prime}\boldsymbol{X}^* + c\boldsymbol{I})^{-1}\boldsymbol{X}^{*\prime}\boldsymbol{X}^*\boldsymbol{\beta}_{\boldsymbol{OR}}$$

Misalkan $\boldsymbol{V} = (\boldsymbol{X}^{*\prime}\boldsymbol{X}^* + c\boldsymbol{I})^{-1}\boldsymbol{X}^{*\prime}\boldsymbol{X}^*$, maka

$$E(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\boldsymbol{OR}}) = \boldsymbol{V}\boldsymbol{\beta}_{\boldsymbol{OR}} \tag{2.20}$$

Karena $E(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\boldsymbol{OR}}) \neq \boldsymbol{\beta}_{\boldsymbol{OR}}$, **d**apat dikatakan $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\boldsymbol{OR}}$ merupakan penduga bias bagi $\boldsymbol{\beta}_{\boldsymbol{OR}}$.

b) Ragam penduga

Ragam penduga ORR adalah

$$var(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\boldsymbol{OR}}) = var((\boldsymbol{X}^{*\prime}\boldsymbol{X}^* + c\boldsymbol{I})^{-1}\boldsymbol{X}^{*\prime}\boldsymbol{Y}^*)$$

$$= cov\,[(\boldsymbol{X}^{*\prime}\boldsymbol{X}^* + c\boldsymbol{I})^{-1}\boldsymbol{X}^{*\prime}\boldsymbol{Y}^*, ((\boldsymbol{X}^{*\prime}\boldsymbol{X}^* + c\boldsymbol{I})^{-1}\boldsymbol{X}^{*\prime}\boldsymbol{Y}^*)']$$

$$= cov\,[(\boldsymbol{X}^{*\prime}\boldsymbol{X}^* + c\boldsymbol{I})^{-1}\boldsymbol{X}^{*\prime}\boldsymbol{Y}^*, \boldsymbol{Y}^{*\prime}\boldsymbol{X}^*(\boldsymbol{X}^{*\prime}c\boldsymbol{I})^{-1}]$$

$$= (\boldsymbol{X}^{*\prime}\boldsymbol{X}^{*} + c\boldsymbol{I}\,)^{-1}\boldsymbol{X}^{*\prime} cov\,[\boldsymbol{Y}^{*}, \boldsymbol{Y}^{*\prime}]\boldsymbol{X}^{*}$$
$$(\boldsymbol{X}^{*\prime}\boldsymbol{X}^{*} + c\boldsymbol{I}\,)^{-1}$$

Karena $cov\,[\boldsymbol{Y}^{*}, \boldsymbol{Y}^{*\prime}] = \sigma^2\boldsymbol{I},$ maka

$$var(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\boldsymbol{OR}}) = (\boldsymbol{X}^{*\prime}\boldsymbol{X}^{*} + c\boldsymbol{I}\,)^{-1}\boldsymbol{X}^{*\prime}\sigma^2\boldsymbol{I}\boldsymbol{X}^{*}(\boldsymbol{X}^{*\prime}\boldsymbol{X}^{*} + c\boldsymbol{I}\,)^{-1}$$
$$= \sigma^2(\boldsymbol{X}^{*\prime}\boldsymbol{X}^{*} + c\boldsymbol{I}\,)^{-1}\boldsymbol{X}^{*\prime}\boldsymbol{X}^{*}(\boldsymbol{X}^{*\prime}\boldsymbol{X}^{*} + c\boldsymbol{I}\,)^{-1} \quad (2.21)$$

VIF_j sebagai fungsi dari c merupakan unsur diagonal ke j dalam matriks $(\boldsymbol{X}^{*\prime}\boldsymbol{X}^{*} + c\boldsymbol{I}\,)^{-1}\boldsymbol{X}^{*\prime}\boldsymbol{X}^{*}(\boldsymbol{X}^{*\prime}\boldsymbol{X}^{*} + c\boldsymbol{I}\,)^{-1}$ (2.22)

2.5.3 Penentuan Konstanta Bias (*c*) ORR

Hoerl dan Kennard (1970) mengusulkan sebuah metode pemilihan untuk memilih *c* menggunakan

$$c = \frac{\hat{\sigma}^2}{\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{*\prime}\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{*}} \quad (2.23)$$

di mana $\hat{\sigma}^2$ dan $\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{*}$ masing-masing adalah kuadrat tengah sisaan model regresi baku (2.15) dan penduga MKT yang didapatkan dari persamaan (2.16).

2.5.4 *Generalized Ridge Regression* (GRR)

GRR adalah pengembangan dari ORR yang memungkinkan konstanta bias (*c*) berbeda untuk setiap peubah prediktor. Sebelum melakukan pendugaan parameter GRR terlebih dahulu dilakukan pembakuan data menggunakan persamaan (2.13) dan (2.14), sehingga model regresi linier berganda yang digunakan adalah persamaan (2.15).

Misalkan $\boldsymbol{\Lambda}$ adalah matriks diagonal berordo k dengan anggota diagonal utama adalah akar ciri $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ matriks $\boldsymbol{X}^{*\prime}\boldsymbol{X}^{*}$ yang didapat melalui persamaan ciri $|\boldsymbol{X}^{*\prime}\boldsymbol{X}^{*} - \boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{I}| = \boldsymbol{0}$ dan $\boldsymbol{P}$ adalah matriks ortogonal berordo *k* berisi vektor ciri yang bersesuaian dengan λ_j. Sedemikian hingga

$$\boldsymbol{P}'(\boldsymbol{X}^{*\prime}\boldsymbol{X}^{*})\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\Lambda}$$
$$\boldsymbol{P}'\boldsymbol{X}^{*\prime}\boldsymbol{X}^{*}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\Lambda}$$
$$(\boldsymbol{X}^{*}\boldsymbol{P})'\boldsymbol{X}^{*}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\Lambda}$$
$$\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{\Lambda}$$

karena $\boldsymbol{P}' = \boldsymbol{P}^{-1}$, maka $\boldsymbol{P}'\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{P}' = \boldsymbol{I}.$ Persamaan (2.15) dapat ditulis kembali

$$\boldsymbol{Y}^* = \boldsymbol{X}^*\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$$
$$\boldsymbol{Y}^* = \boldsymbol{X}^*(\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}')\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$$
$$= (\boldsymbol{X}^*\boldsymbol{P})\boldsymbol{P}'\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$$
$$\boldsymbol{Y}^* = \boldsymbol{Z}\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\varepsilon} \qquad (2.24)$$

di mana $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{X}^*\boldsymbol{P}$ dan $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{P}'\boldsymbol{\beta}$**.** Persamaan (2.24) disebut model tidak berkorelasi. Dengan menerapkan MKT, penduga kuadrat terkecil bagi $\boldsymbol{\alpha}$ adalah

$$\widehat{\boldsymbol{\alpha}} = (\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Y}^* \qquad (2.25)$$

Persamaan (2.25) dapat dibentuk menjadi

$$\widehat{\boldsymbol{\alpha}} = ((\boldsymbol{X}^*\boldsymbol{P})'(\boldsymbol{X}^*\boldsymbol{P}))^{-1}(\boldsymbol{X}^*\boldsymbol{P})'\boldsymbol{Y}^*$$
$$= (\boldsymbol{P}'\boldsymbol{X}^{*\prime}\boldsymbol{X}^*\boldsymbol{P})^{-1}\boldsymbol{P}'\boldsymbol{X}^{*\prime}\boldsymbol{Y}^*$$
$$= (\boldsymbol{P}'\boldsymbol{X}^{*\prime}\boldsymbol{X}^*\boldsymbol{P})^{-1}\boldsymbol{P}'\boldsymbol{X}^{*\prime}\boldsymbol{X}^*\widehat{\boldsymbol{\beta}}$$
$$= (\boldsymbol{P}'\boldsymbol{X}^{*\prime}\boldsymbol{X}^*\boldsymbol{P})^{-1}\boldsymbol{P}'\boldsymbol{X}^{*\prime}\boldsymbol{X}^*\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}'\widehat{\boldsymbol{\beta}}$$
$$= (\boldsymbol{P}'\boldsymbol{X}^{*\prime}\boldsymbol{X}^*\boldsymbol{P})^{-1}(\boldsymbol{P}'\boldsymbol{X}^{*\prime}\boldsymbol{X}^*\boldsymbol{P})\boldsymbol{P}'\widehat{\boldsymbol{\beta}}$$
$$= \boldsymbol{P}'\widehat{\boldsymbol{\beta}} \qquad (2.26)$$

Berdasarkan persamaan (2.26), didapat penduga parameter regresi MKT awal yaitu $\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{P}\widehat{\boldsymbol{\alpha}}$ (2.27)

Perumusan penduga GRR diperoleh melalui MKT yang telah dimodifikasi dengan menambahkan kendala tertentu. Menerapkan pengganda Lagrange di mana $\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{C})$ adalah nilai yang meminimumkan fungsi tujuan dan syarat pembatas yaitu $\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{C})'\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{C}) \leq a^2$ maka

$$G = (\boldsymbol{Y}^* - \boldsymbol{Z}\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{C}))'(\boldsymbol{Y}^* - \boldsymbol{Z}\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{C})) + c(\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{C})'\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{C}) - a^2)$$
$$G = \left(\boldsymbol{Y}^{*\prime} - \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{C})'\boldsymbol{Z}'\right)(\boldsymbol{Y}^* - \boldsymbol{Z}\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{C})) + c(\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{C})'\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{C}) - a^2)$$
$$G = \boldsymbol{Y}^{*\prime}\boldsymbol{Y}^* - \boldsymbol{Y}^{*\prime}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{C}) - \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{C})'\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Y}^* + \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{C})'\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z}\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{C}) + c(\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{C})'\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{C}) - a^2)$$

karena $\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{C})'\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Y}^*$ skalar, dengan menggunakan sifat putaran matriks $(\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{C})'\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Y}^*)' = \boldsymbol{Y}^{*\prime}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{C})$, maka

$$G = \boldsymbol{Y}^{*\prime}\boldsymbol{Y}^* - \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{C})'\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Y}^* - \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{C})'\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Y}^* + \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{C})'\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z}\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{C}) + c(\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{C})'\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{C}) - a^2)$$
$$G = \boldsymbol{Y}^{*\prime}\boldsymbol{Y}^* - 2\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{C})'\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Y}^* + \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{C})'\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z}\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{C}) + c(\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{C})'\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{C}) - a^2)$$

Nilai G minimum jika

$$\frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{C})} = 0$$
$$0 = -2\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Y}^* + 2\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z}\widehat{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{C}) + 2\boldsymbol{C}\widehat{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{C})$$
$$0 = -\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Y}^* + \boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z}\widehat{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{C}) + \boldsymbol{C}\widehat{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{C})$$
$$= -\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Y}^* + (\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z} + \boldsymbol{C})\,\widehat{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{C})$$

Persamaan normal di atas dapat ditulis sebagai

$(\boldsymbol{X}^{*\prime}\boldsymbol{X}^{*} + \boldsymbol{C})\,\widehat{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Y}^{*}$

$$\widehat{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z} + \boldsymbol{C})^{-1}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Y}^{*} \qquad (2.28)$$

(Puri, 2014)

Menggunakan langkah yang sama seperti pembentukan persamaan (2.26), di dapatkan penduga parameter GRR adalah

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{GRR} = \boldsymbol{P}\widehat{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{C}) \qquad (2.29)$$

di mana:

$\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{GRR}$ = penduga parameter *generalized ridge regression.*

$\boldsymbol{C}$ = $diag(c_1, c_2, \dots, c_k)$ = matriks konstanta bias.

Karakteristik penduga GRR adalah

a) Bias

$$E(\widehat{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{C})) = E((\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z} + \boldsymbol{C})^{-1}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Y}^{*})$$
$$= (\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z} + \boldsymbol{C})^{-1}\boldsymbol{Z}'E(\boldsymbol{Y}^{*})$$

Karena $E(\boldsymbol{Y}^{*}) = \boldsymbol{Z\alpha}$ **,** maka

$$E(\widehat{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{C})) = (\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z} + \boldsymbol{C})^{-1}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z\alpha}$$
$$= W\boldsymbol{\alpha}$$

Misal $W = (\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z} + \boldsymbol{C})^{-1}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z}$ **,** sehingga

$$E(\widehat{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{C})) = W\boldsymbol{\alpha} \qquad (2.30)$$

Karena $E(\widehat{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{C})) \neq \boldsymbol{\alpha}$, maka $\widehat{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{C})$ adalah penduga bias bagi $\boldsymbol{\alpha}$.

b) Ragam penduga

Ragam penduga GRR adalah

$$var\big(\widehat{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{C})\big) = var((\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z} + \boldsymbol{C})^{-1}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Y}^{*})$$
$$= cov\,[(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z} + \boldsymbol{C})^{-1}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Y}^{*}, ((\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z} + \boldsymbol{C})^{-1}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Y}^{*})']$$
$$= cov\,[(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z} + \boldsymbol{C})^{-1}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Y}^{*}, \boldsymbol{Y}^{*\prime}\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z} + \boldsymbol{C})^{-1}]$$
$$= (\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z} + \boldsymbol{C})^{-1}\boldsymbol{Z}'cov\,[\boldsymbol{Y}^{*}, \boldsymbol{Y}^{*\prime}]\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z} + \boldsymbol{C})^{-1}$$

Karena $cov\left[\boldsymbol{Y}^{*}, \boldsymbol{Y}^{*\prime}\right] = \sigma^2\boldsymbol{I}$**,** maka

$$var\big(\widehat{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{C})\big) = (\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z} + \boldsymbol{C})^{-1}\boldsymbol{Z}'\sigma^2\boldsymbol{IZ}(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z} + \boldsymbol{C})^{-1}$$
$$= \sigma^2(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z} + \boldsymbol{C})^{-1}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z} + \boldsymbol{C})^{-1} \qquad (2.31)$$

Utami, *et.al*. (2013) menerangkan $VIF_j(\boldsymbol{C})$ sebagai fungsi dari c merupakan unsur diagonal ke j dalam matriks $(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z} + \boldsymbol{C})^{-1}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z} + \boldsymbol{C})^{-1}$ (2.32)

2.5.5 Penentuan Konstanta Bias (c) GRR

Penentuan konstanta bias (c) metode GRR sama dengan metode ORR yaitu mengunakan usulan Hoerl dan Kennard (1970),

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} \frac{\hat{\sigma}^2}{\hat{\alpha}_1'\hat{\alpha}_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{\hat{\sigma}^2}{\hat{\alpha}_2'\hat{\alpha}_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{\hat{\sigma}^2}{\hat{\alpha}_k'\hat{\alpha}_k} \end{bmatrix} \tag{2.33}$$

di mana $\hat{\sigma}^2$ an $\hat{\alpha}_j$ masing-masing adalah kuadrat tengah sisaan model tidak berkorelasi (2.24) dan penduga parameter ke-j yang didapatkan dari persamaan (2.25).